Licence 2 : Sciences et technologie

Topologie et calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions de deux variables suivantes :

$$f(x,\,y) = \frac{x^3 + 4y^2}{x^2 + y^2} \qquad g(x,\,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy} \qquad h(x,\,y) = \frac{\sqrt{-y + x^2}}{\sqrt{y}} \qquad i(x,\,y) = \ln(x + y).$$

Exercice 2
Les fonctions f, g et h suivantes ont-elles une limites en $(0,\,0)$? (on calculera la limite si elle existe ou on montrera qu'elle n'existe pas).

$$f(x,\,y) = \frac{x^2(\sin y)^2}{x^2 + 3y^2} \qquad g(x,\,y) = \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2} \qquad h(x,\,y) = \frac{sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Exercice 3
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,\,y) = \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2 + y^2} \text{ si } (x,\,y) \neq (1,\,0) \text{ et } f(1,\,0) = 0.$$

1. Etudier la continuité de f au point $(1,\,0)$.
2. Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f au point $(1,\,0)$.
3. Etudier la différentiabilité de f au point $(1,\,0)$.

Exercice 4
Soit $f\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,\,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,\,y) \neq (0,\,0) \text{ et } f(0,\,0) = 0.$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-ellle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5
On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,\,y) = \left(x - \frac{1}{3}\sin y, y + \frac{1}{2}\cos x\right).$$

1. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer la différentielle de f au point $a = (\pi,\,0)$ appliquée à $h = (2, -1)$.

Exercice 6
Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une application diffférentiable et $g\ :\ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$g(u,\, v) = f(u^2 + v^2,\, uv).$$

1. Justifier que g est différentiable.
2. Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 7
Soit $f\ :]0,\, +\infty[$ une fonction dérivable. On note f' sa fonction dérivée.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\, 0)\}$ par

$$g(x,\, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Sachant que $f'(2) = 3$, calculer $\dfrac{\partial g}{\partial y}(\sqrt{3},\, 1)$.

Exercice 8
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,\, y) = x^3 + y^3 + 3mxy,$$

où m est un paramètre réel non nul.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Donner la nature de chaque point critique de f.

Exercice 9
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,\, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Donner la nature de chaque point critique de f.

Exercice 10
Montrer que la relation

$$x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 = 1$$

définit y comme fonction de x au voisinage du point $(-1,\, 1)$.
Calculer alors $\dfrac{dy}{dx}$ en ce point.